

## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

1. Оценки Чебышева функции  $\pi(x)$ . Формулировка асимптотического закона распределения простых чисел. Асимптотическая формула для  $n$ -го простого числа. Сведение асимптотического равенства  $\pi(x) \sim x/\log x$  к равенствам  $\psi(x) \sim x$  и  $\omega(x) \sim x$ .
2. Основная теорема арифметики. Эффективное (алгоритми Евклида) и неэффективное доказательство.
3. Аналитичность дзета-функции Римана в области  $\sigma > 1$ . Разложение в ряд Дирихле  $1/\zeta(s)$  и логарифмической производной дзета-функции. Функции Мебиуса и Мангольдта. Отсутствие нулей дзета-функции в области  $\sigma > 1$ .
4. Представление суммы значений мультипликативной функции в виде бесконечного произведения по простым. Следствия для дзета-функции.
5. Преобразования Абеля в интегральной форме. Аналитическое продолжение дзета-функции в область  $\sigma > 0$ .
6. Вывод формулы, выражающей функцию  $\omega(x)$  через дзета-функцию в виде интеграла по вертикальной прямой.
7. Отсутствие нулей дзета-функции на прямой  $\sigma = 1$ .
8. Оценки функций  $\zeta(s)$ ,  $\zeta'(s)$  и  $(\zeta'(s))/(\zeta(s))$  в области  $\sigma \geq 1$ ,  $|t| \geq 3$ .
9. Сдвиг контура интегрирования и выделение главного члена в интегральной формуле для функции  $\omega(x)$ . Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел.
10. Доказательства бесконечности множества простых чисел в прогрессиях вида  $4n + 1$  и  $4n + 3$  методом  $L$ -рядов.
11. Простейшие свойства групповых характеров. Построение характеров. Вычисление сумм  $\sum_{a \in G} \chi(a)$  и  $\sum_{\chi} \chi(a)$  для характеров  $\chi$  группы  $G$ . Определение и свойства числовых характеров.
12. Аналитичность функции Дирихле  $L(s, \chi)$  в области  $\sigma > 1$ . Разложение в ряд Дирихле ее логарифмической производной. Отсутствие нулей  $L$ -функции в области  $\sigma > 1$ . Представление  $L$ -функции в виде бесконечного произведения. Аналитическое продолжение функции  $L(s, \chi_0)$  в область  $\sigma > 0$ . Область сходимости и аналитичность ряда  $L(s, \chi)$  для неглавного характера.
13. Неравенство  $L(1, \chi) \neq 0$  для действительного характера  $\chi$ .
14. Неравенство  $L(1, \chi) \neq 0$  при  $\chi^2 \neq \chi_0$ .
15. Доказательство теоремы Дирихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии.
16. Свойства минимального и канонического многочленов алгебраического числа. Степень алгебраического числа. Целые алгебраические числа. Лемма Гаусса и ее следствия, относящиеся к целым алгебраическим числам. Критерий Эйзенштейна и существование алгебраических чисел произвольной степени.