Проверим, что других чисел в спектре нет.

Утв3: $\mathcal{E} = \{E = \hbar\omega(m+\frac{1}{2})$, где $m = 0, 1, \ldots\}$.

Док: Рассм. произв. дов-ие: φ — реш. ур. Шр, соотв-ее знач-ю энергии E.

Утв-се, что $\hat{a}\varphi$ — реш. —"— , —"— энергии $E-\hbar\omega$.

Рассм-м $\hat{H}\hat{a}\varphi \underset{(4)}{=} \hat{a}\hat{H}\varphi - \hbar\omega\hat{a}\varphi = (E-\hbar\omega)\hat{a}\varphi$.

если $\hat{a}\varphi$ — не ноль, то собств. ф-ция, отв-ая знач. эн-ии $E-\hbar\omega$.

К-н. одно знач. (реш. ур. Шр.) зафикс. и рассм-м:

$\hat{a}\varphi$ — либо ноль, либо ... $E-\hbar\omega$

Далее $\hat{a}^2\varphi$ — либо ноль, либо... $E-2\hbar\omega$

и т.д.

Но если φ — реш. ур. Шр, соотв-ие знач-ю энергии E,

то $\exists$ m, т.ч. $\hat{a}^m\varphi = 0$; но $\hat{a}^{m-1}\varphi \neq 0$.

Рассм-м $\hat{a}^{m-1}\varphi$: $\hat{a}(\underbrace{\hat{a}^{m-1}\varphi}_{\parallel}) = 0$

$$\hat{a}^{m-1}\varphi = C\varphi_0$$

С одн. стор: $\hat{a}^{m-1}\varphi$ соотв. $E-\hbar\omega(m-1)$
с друг. стор: $\hat{a}^{m-1}\varphi = C\varphi_0$ соотв. $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ $\Big| \Rightarrow$

$E - \hbar\omega(m-1) = \frac{\hbar\omega}{2}$. Отсюда: $E = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega(m-1)$,

ч.т.д.