Домнож. (2) на $\hat{a}^*$ (спр.): $\hat{a}^*\hat{a}\hat{a}^* = 2\hat{a}^*\hat{H} + h\omega\hat{a}^*$

Вычтем их: $0 = 2[\hat{H}, \hat{a}^*] - eh\hat{a}^*$

(4) тоже аналогично. Остальное — тоже легко. Утв. док.

Пусть $\mathcal{E}$ — мн-во чисел E, при к-рых $\exists$ огр. реш. ур.(V)

Утв1: $E \in \mathcal{E} \Longrightarrow E \geqslant \frac{h\omega}{2}$ (огр-ть снизу мн-ва E)

$$\left(\frac{h\omega}{2} \in \mathcal{E}\right) \Leftrightarrow \left(\exists \text{ огр. ф-ция } \varphi_0(x), \text{ т.ч. } \hat{a}\varphi_0(x) = 0\right)$$

Док-во: $\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{a}^*\hat{a} + \frac{h\omega}{2}$ $\qquad \hat{H}\varphi = E\varphi$

Тогда $\frac{1}{2}\hat{a}^*\hat{a}\varphi + \frac{h\omega}{2}\varphi = E\varphi$ (скалярно умножим на φ в пр-ве L_2)

$$E\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2 dx = \frac{h\omega}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\,\hat{a}^*\hat{a}\varphi\, dx$$

Учитывая, что в L_2 опер-ры ($\hat{a}^*$ и $\hat{a}$) сопряжены, то будем применять так:

$$\int\varphi\left(\omega x - \frac{h\,d}{dx}\right)\hat{a}\varphi\, dx = \int\varphi\,\omega x\,\hat{a}\,\varphi dx - \underbrace{\varphi\cdot h\,\hat{a}\,\varphi\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} +$$

(т.к. φ убыв. на ∞ быстр. $\forall$ степ. x)

$$+\int h\,\frac{d\varphi}{dx}\,\hat{a}\,\varphi\, dx =$$

$$= \int\hat{a}\varphi\left(\omega x + h\frac{d}{dx}\right)\varphi = \int(\hat{a}\varphi)^2 dx$$

$$E = \frac{h\omega}{2} + \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2 dx}\cdot\frac{1}{2}\int(\hat{a}\varphi)^2 dx$$

Отсюда: $E \geqslant \frac{h\omega}{2}$.