

соотв-ие каноническому моменту:

$$\hat{a}^* = \omega x - \hbar \frac{d}{dx}$$

дифф. опер. это пер

$$\hat{a} = \omega x + \hbar \frac{d}{dx}$$

Рассм-м канонич. функц  $H(x, p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2) =$   
 $= \frac{1}{2} (\omega x - i p) (\omega x + i p) \leftarrow$  разд. на множит. (!)

канонич. эти функц, получим опер. ф-ры фотод-я и уничтож-ия.

Упр: Справ-вы след. рав-ва:

$$\hat{a}^* \hat{a} = \hat{H} - \hbar \omega \quad (1)$$

$$\hat{a} \hat{a}^* = \hat{H} + \hbar \omega \quad (2)$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^*] = \hbar \omega \hat{a}^* \quad (3)$$

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar \omega \hat{a} \quad (4)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^*] = 2\hbar \omega \quad (5)$$

Док-во:  $\hat{a} \hat{a}^* = \hat{H} \quad (!)$

$$\begin{aligned} \hat{a}^* \hat{a} u &= \left( \omega x - \hbar \frac{d}{dx} \right) \left( \omega x + \hbar \frac{d}{dx} \right) u = \left( \omega x - \hbar \frac{d}{dx} \right) (\omega x u + \hbar u') = \\ &= \omega^2 x^2 u + \hbar \omega x u' - \hbar \omega u - \hbar \omega x u' - \hbar^2 u'' = \left( -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 x^2 \right) u - \hbar \omega u \Rightarrow (1) \end{aligned}$$

(2) аналогично.

Дока-ем (3):

Дока-ем (1) на  $\hat{a}^*$ :  $\hat{a}^* \hat{a} \hat{a}^* = \hat{H} \hat{a}^* - \hbar \omega \hat{a}^*$