Причём, если $E = \frac{h\omega}{2}$, то $\hat{a}\varphi = 0$.

Если $\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{a}^*\hat{a} + \frac{h\omega}{2}$ применить к φ, то

если $\hat{a}\varphi = 0 \Longrightarrow E = \frac{h\omega}{2}$ – огр. решение, ч.т.д.

$\omega x\varphi + h\frac{d}{dx}\varphi = 0$

$h\varphi' = -\omega x\varphi$

$\varphi_0(x) = Ce^{-\frac{\omega x^2}{2h}}$ — гладкая функц. огр. ая со всеми произв-ми.

$E_0 = \frac{h\omega}{2}$ (собств. функция опер. Гам., отвеч-ая E_0)

Утв2: Для $\forall$ нат. $m=1,2,\ldots$ число $E_m = h\omega\left(m+\frac{1}{2}\right) \in \mathcal{E}$.

Соотв-ая собств-ая функция, т.е. соотв-ие реш-ие ур-ия Шрёд. им. вид: $\varphi_m = C_m(\hat{a}^*)^m\varphi_0$.

Док-во: Исп (3):
$$\hat{H}\hat{a}^* - \hat{a}^*\hat{H} = h\omega\hat{a}^*.$$

Пусть φ – гл. огр. реш. ур. Шр., соотв. знач-ю энергии E, тогда
$\hat{a}^*\varphi$ – либо нуль, либо реш, соотв-ие $E+h\omega$

Применим: $\hat{H}\hat{a}^*\varphi \underset{(3)}{=} \hat{a}^*\hat{H}\varphi + h\omega\hat{a}^*\varphi = E\varphi + h\omega\hat{a}^*\varphi =$
$= (E+h\omega)\hat{a}^*\varphi$, ч.т.д.

Рассм-м функцию φ_0, если прим. $\hat{a}^* = \omega x - h\frac{d}{dx} \;\Big|\Rightarrow$
не нуль, т.е. φ_0 соотв. E_0, тогда

$\hat{a}^*\varphi_0 = \varphi_1$ – соотв; $E_1 = \frac{h\omega}{2} + h\omega$

Далее $\hat{a}^*\varphi_1 = \varphi_2$ соотв. $E_2 = \frac{h\omega}{2} + 2h\omega$ и т.д. ч.т.д.